07.03.16

Άσκηση 3 / σελ. 341: Έστω ένα σύνολο E και μια συνάρτηση $\rho: E\times E \to \mathbb{R}$ τ.ω. για τυχόντα x, y, z εν E να ισχύει

α) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$

β) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$

Ν.δ.ο η ρ είναι μετρική στο E.

Λύση

Scanned by CamScanner

Για να είναι μετρική
1) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$ ισχύει λόγω (α)
2) $\rho(y,x)=\rho(x,y)$
3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

Θ.δ.ο. $\rho(y,x)=\rho(x,y)$
Η β) για $z=x \Rightarrow \rho(x,y)\le \overset{0}{\rho(x,x)}+\rho(y,x)$
$\Rightarrow \rho(x,y)\le\rho(y,x)$, (1)

Η β) $\Rightarrow \rho(y,x)\le\rho(y,z)+\rho(x,z)$, (*)
όπου x το y
και όπου y το x
για $z=y$: $\overset{(*)}{\Rightarrow} \rho(y,x)\le \overset{0}{\rho(y,y)}+\rho(x,y)$
$\Rightarrow \rho(yx)\le\rho(x,y)$, (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει η συμμετρική ιδιότητα : $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

Θ.δ.ο. ισχύει και η 3).
Ισχύει: $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(y,z)$
και αποδείξαμε ότι $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.
$\Rightarrow \rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

Άσκηση 10/σελ. 346: Έστω $E=C([\alpha,\beta])$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$. Ν.δ.ο. η συνάρτηση

$$\rho: E\times E\to\mathbb{R}$$

με τύπο $\rho(f,g)=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$

είναι μετρική στο E.

Λύση

Θ.δ.ο. $\rho(f,g)=0 \iff f=g$
προσοχή! διπλή συνεπαγωγή

" $\Leftarrow$ "

Scanned by CamScanner

Λ $f=g \Rightarrow \boxed{\rho(f,g)=0}$

"$\Longleftarrow$"

Έστω $\rho(f,g)=0 \Rightarrow \int_a^\beta \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{=F(x)} dx = 0$

Ισχύει ότι: $F(x) \geq 0$, $x \in [a,\beta]$ και F συνεχής στο $[a,\beta]$.

$\Downarrow$

αφού f,g συνεχείς, άρα και η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους θα είναι συνεχής

Ισχύει επίσης: $\int_a^t F(x)dx \leq \int_a^\beta F(x)\,dx$, $t \in [a,\beta]$

όμως $\int_a^\beta F(x)dx = 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^t F(x)dx \leq 0$, $t \in [a,\beta]$

όμως $F(x) \geq 0$, $x \in [a,\beta]$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ άρα $\int_a^t F(x)dx = 0$, $\forall t \in [a,\beta]$.

F συνεχής στο $[a,\beta]$: η συνέχεια της F εξασφαλίζει την ύπαρξη της G

$\int_a^t F(x)\,dx = G(t)-G(a)$, G: αρχική ή παράγουσα της F (δηλ. $G'(x) = F(x)$)

Scanned by CamScanner

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^t F(x)\,dx = 0 \\ &\int_a^t F(x)\,dx = G(t) - G(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(t) = G(a), \ t \in [a, \beta]$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Άρα, } G'(t) = 0 \ \forall t \in [a,\beta]. \\ &\text{Όμως, } G'(t) = F(t) \ \forall t \in [a,\beta] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Επομένως: } F(t) = 0 \ \forall t \in [a,\beta]$$

δηλαδή, $|f(t) - g(t)| = 0$, $t \in [a,\beta]$
$\Rightarrow f(t) = g(t)$, $t \in [a,\beta]$

Άρα: $\boxed{f = g}$.

Οπότε, τελικά αποδείξαμε ότι $p(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$, δηλ. αποδείξαμε την 1η ιδιότητα της μετρικής.
Μας μένουν άλλες δύο ιδιότητες

Θ.δ.ο. $p(f,g) = p(g,f)$

$$p(f,g) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|\,dx = \int_a^\beta |g(x) - f(x)|\,dx = p(g,f)$$

Θ.δ.ο. $p(f,g) \leq p(f,h) + p(h,g)$ όπου f, g, h συνεχείς συναρτήσεις

$$p(f,g) \leq \int_a^\beta |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$= \int_a^\beta |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|\,dx$$

παίρνω ξεχωριστά και εφαρμόζω τριγωνική ανισότητα

$$\leq \int_a^\beta |f(x) - h(x)|\,dx + \int_a^\beta |h(x) - g(x)|\,dx$$

$$= p(f,h) + p(h,g)$$

Scanned by CamScanner

Άσκηση 26 / σελ. 360: Αν a τυχόν σημείο ενός μ.χ. E και V τυχόν υποσύνολο του E, ν.δ.ο.:
Το V δεν είναι περιοχή του a $\Leftrightarrow$ $a \in (V^\circ)^c$

Λύση

V περιοχή του $a \Leftrightarrow (\exists U(x)) : U(x) \subseteq V$.

V δεν είναι περιοχή του a
$\Leftrightarrow \forall U(a) \quad U(a) \cap \underbrace{V^c}_{B} \neq \emptyset$ → θυμίζει ορισμό θήκης
↓
σκέφτομαι πως αλλιώς μπορώ να γράψω το $(V^\circ)^c$

Γνωρίζουμε ότι: $(V^\circ)^c = \overline{(V^c)}$

$\Leftrightarrow a \in \overline{\underbrace{V^c}_{B}} = (V^\circ)^c$

Αν με δυσκολεύουν οι συμβολισμοί, βάζω το σύνολο ως B ώστε να διευκολύνω τη σκέψη μου, κι έπειτα το αλλάζω.

ΟΡΙΣΜΟΙ

A ανοιχτό $\Leftrightarrow A = A^\circ$
A κλειστό $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Υπάρχουν σύνολα που είναι ταυτόχρονα και ανοιχτά και κλειστά
π.χ. E, $\emptyset$

Στο διακριτό μ.χ. όλα τα σύνολα είναι και ανοιχτά και κλειστά.

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) A ανοιχτό $\Leftrightarrow$ A περιοχή κάθε σημείου του.
(ii) A ανοιχτό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$
(iii) A κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A$
(iv) A κλειστό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$

Scanned by CamScanner

Απόδειξη

(i)

"$\Longrightarrow$"

Έστω A ανοιχτό και x τυχόν σημείο του A

$$x \in A \xrightarrow[\text{δηλ. } A = A^\circ]{A \text{ ανοιχτό}} x \in A^\circ$$

$$\Rightarrow (\exists U(x))\ U(x) \subseteq A$$

$$\Rightarrow A \text{ περιοχή του } x$$

αφού έχουμε αποδείξει ότι υπερσύνολο περιοχής είναι κι αυτό περιοχή

"$\Longleftarrow$"

Έστω A περιοχή κάθε σημείου του. Θ.δ.ο. $A = A^\circ \overset{A^\circ \subseteq A}{\Longleftrightarrow} A \subseteq A^\circ$.

Έστω $x \in A \xrightarrow{\text{υπόθεση}} \exists$ περιοχή του x, το ίδιο το A $(A = U(x))$:

$$U(x) = A \subseteq A$$

$$\Rightarrow x \in A^\circ$$

(Θα μπορούσαμε αντί για τον ορισμό να χρησιμοποιούμε το (ii)).

(ii)

"$\Longrightarrow$"

Έστω A ανοιχτό, δηλ. $A = A^\circ$ και x τυχόν, με $x \in \partial A$

$$x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \bar{A} - A^\circ$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \notin A^\circ \qquad (p \wedge q \Rightarrow p)$$

$$\Rightarrow x \notin A^\circ$$

$$\overset{A = A^\circ}{\Longleftrightarrow} x \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \in A^c$$

Είχαμε αποδείξει ότι:

$$\partial \bar{A} = \partial A$$

δηλ. ξέρουμε ότι το σύνολο είναι κλειστό σύνολο.

Επίσης, ξέρουμε ότι:

$$\partial(\partial A) \subseteq \partial A$$

Επιπλέον, $(B(a,r))^\circ = B(a,r)$

δηλ. η σφαιρική περιοχή είναι ανοιχτό σύνολο

Scanned by CamScanner

"$\Leftarrow$"

Έστω $\partial A \subseteq A^c$. Θ.δ.ο. $\overbrace{A = A^\circ}^{\text{δηλ. A ανοιχτό}} \overset{A^\circ \subseteq A}{\Longleftrightarrow} A \subseteq A^\circ$

$x \in A \Leftrightarrow x \notin A^c$

$\xrightarrow{\partial A \subseteq A^c} x \notin \partial A = \bar{A} - A^\circ$

$\Leftrightarrow \cancel{x \notin \bar{A}} \vee x \in A^\circ$

Το $x \notin \bar{A}$ δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί $\bar{A} \supseteq A$, άρα αφού ανήκει στο A θα ανήκει και στη θήκη

$\Rightarrow x \in A^\circ$

(iii)

Ισχύει $\bar{A} = A \cup A'$, (*)

A κλειστό $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} A = A \cup A'$

$\Leftrightarrow A' \subseteq A$

(iv)

"$\Longrightarrow$"

Έστω A κλειστό $\Leftrightarrow A = \bar{A}$. Θ.δ.ο. $\partial A \subseteq A$.

x τυχόν, $x \in \partial A = \bar{A} - A^\circ = A - A^\circ \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A^\circ$ $(p \wedge q \Rightarrow p)$

$\Rightarrow x \in A$

"$\Leftarrow$"

H/W

Scanned by CamScanner

ΠΡΟΤΑΣΗ

- A ανοιχτό $\iff$ A^c κλειστό
- A κλειστό $\iff$ A^c ανοιχτό

Απόδειξη

της ακριβώς προηγούμενης πρότασης

- Έστω A ανοιχτό $\xrightarrow{(ii)} \partial A \subseteq A^c$

$\xrightarrow{\partial A = \partial(A^c)} \partial(A^c) \subseteq A^c$

$\xrightarrow{(iv)} A^c$ κλειστό

H/W: Το αντίστροφο και τη δεύτερη βουλίτσα.

ΠΡΟΤΑΣΗ

δηλ. μπορεί να είναι είτε πεπερασμένου πλήθους σύνολο είτε να είναι απειροσύνολο.

(i) Η ένωση τυχαίας οικογένειας ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο
(ii) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.
(iii) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο
(iv) Η τομή τυχαίας οικογένειας κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο

Απόδειξη

(i) $A_i, i \in I$ οικογένεια ανοιχτών συνόλων, δηλ. $(\forall i \in I)\ A_i^\circ = A_i$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i^\circ \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$$

από πρόταση που έχουμε δει (βιβλίο σελ. 46)

$$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \text{ ανοιχτό}$$

(iii) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ κλειστά, δηλ. $A_1 = \overline{A_1}, A_2 = \overline{A_2}, \ldots, A_k = \overline{A_k}$

(Στη σελ. 40 του βιβλίου αποδείξαμε ότι: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ και μπορούμε να το επεκτείνουμε)

$$\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_k} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

άρα η ένωση πεπερασμένων συνόλων όντως κλειστό.

H/W: Τα (ii), (iv).

Scanned by CamScanner

Παράδειγμα: $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \{0\}$ → Τομή άπειρου πλήθους ανοιχτών συνόλων η οποία όμως δεν είναι ανοιχτό σύνολο

και είναι $(\forall \nu \in \mathbb{N}) \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)^{\circ} = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$

$(\mathbb{R}, |\ |)$

Ισχύει: $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Εμείς όμως θέλαμε το αντίθετο.

$\{0\}^{\circ} = \emptyset$ (ένα διάστημα δεν μπορεί να είναι υποσύνολο ενός μονοσυνόλου)

Σελ. 46-47: Βλέπε κι άλλα παραδείγματα!

Παρατήρηση: Οι προτάσεις που γράψαμε ισχύουν για οποιονδήποτε μετρικό χώρο με οποιαδήποτε μετρική

Εφαρμογή: $\underbrace{\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset}_{\text{δηλ. μόνο υπό αυτή την προϋπόθεση}} \Rightarrow (A \cup B)^{\circ} = A^{\circ} \cup B^{\circ}$ ↛ (το αντίστροφο δεν ισχύει)

Απόδειξη

(Γενικά ισχύει: $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$) θα ισχύει η ισότητα

Επιπλέον, $\bigcup_{i \in I} A_i^{\circ} \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\circ}$.

Αρκεί ν.δ.ο. $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow (A \cup B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cup B^{\circ}$

Έστω x τυχόν: $x \in (A \cup B)^{\circ} \Leftrightarrow (\exists V(x))\, V(x) \subseteq A \cup B$, $(*)$

$\xrightarrow{x \in V(x)} x \in A \vee x \in B$

Έστω $x \in A \xrightarrow{A \subseteq \bar{A}} x \in \bar{A}$

$\xrightarrow{\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset} x \notin \bar{B}$

$\Rightarrow \sim (x \in \bar{B})$

$\Leftrightarrow \sim [(\forall U(x))\, U(x) \cap B \neq \emptyset]$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow (\exists U(x))\ U(x)\cap B = \emptyset$

Θεωρώ $W(x) = U(x)\cap V(x)$ (αφού η τομή πεπερασμένου πλήθους περιοχών είναι κι αυτή περιοχή)

$$\left.\begin{aligned} W(x) &= U(x)\cap V(x) \subseteq V(x) \\ &\subseteq A\cup B \ [\text{λόγω } (*)] \\ \text{και} \\ W(x) &= U(x)\cap V(x) \subseteq U(x) \Rightarrow W(x)\cap B = \emptyset \end{aligned}\right\} \Rightarrow W(x)\subseteq A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in A^\circ \subseteq \underline{A^\circ\cup B^\circ}$$

Παράδειγμα (για καλύτερη κατανόηση της εφαρμογής):

Η/W: $\underbrace{\bar{A}\cap B = A\cap \bar{B} = \emptyset} \Rightarrow (A\cup B)^\circ = A^\circ\cup B^\circ$

Θα καταλήξουμε ότι αυτή η υπόθεση είναι καλύτερη απ' ότι αυτή που χρησιμοποιήσαμε στην εφαρμογή.

Εφαρμογή: A ανοιχτό, B τυχόν, ν.δ.ο.

$A\cap \bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$

αυτό γενικά δεν ισχύει, αλλά μπορεί να ισχύει υπό την υπόθεση ότι A ανοιχτό

Απόδειξη

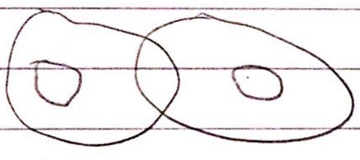
Ξέρουμε ότι: $\bar{B}\supseteq B$

$\bar{B}\supseteq B \Rightarrow A\cap\bar{B}\supseteq A\cap B$

$[0,1]$ $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

με $\begin{cases} [0,1]^\circ = (0,1) \\ \overline{[0,1]} = [0,1] \end{cases}$

δηλ. δεν είναι ούτε ανοιχτό = ούτε κλειστό



Έστω $x\in A\cap\bar{B}\neq\emptyset \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in\bar{B}$.

δηλ. μπορεί να θεωρηθεί ως περιοχή του x.

Επειδή A ανοιχτό και $x\in A$. Άρα: $A = A(x)$ (περιοχή του x)

Όμως $x\in\bar{B} \Rightarrow A(x)\cap B\neq\emptyset$

$\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$

Scanned by CamScanner

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν A ανοιχτό και B κλειστό τότε $A-B$ ανοιχτό και $B-A$ κλειστό.

Απόδειξη

από πρόταση με τομή και ένωση ανοιχτών, κλειστών

$A-B = A \cap B^c \xrightarrow{(ii)}$ ανοιχτό

$B-A = B \cap A^c \xrightarrow{(iv)}$ κλειστό

Scanned by CamScanner